

Parametrisierung projektiver Relationen

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Raimund Funke
aus Neuhaus

1985



Parametrisierung projektiver Relationen

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg**

zur

Erlangung des Doktorgrades

**vorgelegt von
Raimund Funke
aus Neuhaus**

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 17.12.1985

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatte: Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatte: Professor Dr. K. Leeb

Parametrisierung projektiver Relationen

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	1 - 3
Kapitel I	Grundbegriffe der deskriptiven Mengenlehre	4 - 8
Kapitel II	Kategorie- und maßtheoretische Regularitäts- Eigenschaften normierter und skalierten Punktklassen	9 - 15
Kapitel III	Parametrisierung von projektiven Relationen	16 - 24
Kapitel IV	Parametrisierung mittels Heiratsfunktionen	25 - 33
	Literaturverzeichnis	34 - 36
	Lebenslauf	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546226_0082

Einleitung

Im Jahre 1930 stellte Lusin das Problem, für eine projektive Relation im Produkt zweier polnischer Räume eine topologisch akzeptable Uniformisierung (Auswahlfunktion) zu finden. Auf der Grundlage einer Arbeit von Novikov 1935 zeigte Kondo 1938, daß jede coanalytische Relation eine Uniformisierung besitzt, deren Graph coanalytisch ist. Das Lusinsche Uniformisierungsproblem für Relationen höherer projektiver Komplexität wurde 1971 von Moschovakis gelöst. Er abstrahierte aus der grundlegenden Beweisidee des Satzes von Kondo-Novikov - der Konstruktion einer bestimmten Folge von Ordinalzahlzuordnungen - den Begriff der Skala. Unter Voraussetzung der Existenz von projektiven Skalen zeigte Moschovakis, daß sich jede projektive Relation projektiv uniformisieren läßt. Hierbei konnte die Existenz projektiver Skalen durch starke mengentheoretischen Hypothesen - wie dem Axiom der projektiven Determiniertheit (PD) - gesichert werden. Für die Lösung des allgemeinen Lusinschen Uniformisierungsproblems sind nach Levy [1965] mengentheoretische Voraussetzungen unerläßlich.

In dieser Arbeit wird die Existenz injektiver Parametrisierungen untersucht. Eine injektive Parametrisierung einer Relation A im Produkt zweier perfekter, polnischer Räume $X \times Y$ ist eine mit Punkten $y \in Y$ parametrisierte Familie von paarweise disjunkten Uniformisierungen von A .

Im ersten Kapitel stellen wir die benötigten Sätze über die Hierarchie- und Regularitäts-Eigenschaften der projektiven Punktklassen und Folgerungen aus dem Axiom der projektiven Determiniertheit (PD) zusammen.

Im zweiten Kapitel werden maß- und kategoriethoretische Regularitätseigenschaften skaliertter Punktmengen entwickelt. Insbesondere verschärfen wir in Theorem 1 und 2 die Eigenschaft der σ -Additivität des Ideals der mageren Mengen. In Lemma 8 zeigen wir, daß eine skalierte Punktmenge von zweiter Kategorie auf bestimmte Weise in zwei disjunkte, projektive Teilmengen von zweiter Kategorie gespaltet werden kann.

Mit Hilfe dieses Spaltungs-Lemmas wird im dritten Kapitel als Hauptergebnis dieser Arbeit der folgende Parametrisierungs-Satz bewiesen (Theorem 3):

(PD) Jede projektive Relation mit Fasern von zweiter Kategorie besitzt eine injektive Parametrisierung projektiver Komplexität.

Im Falle einer coanalytischen Relation ergibt obiges Theorem eine parametrisierte Version des Satzes von Kondo-Novikov. Die hierzu nötige Determiniertheit der offen-abgeschlossenen Mengen folgt aus dem Satz von Gale-Stuart [1953]. Als weiteres Korollar ergibt sich ein Parametrisierungsergebnis für die ambigen Punktklassen Δ_n^1 :

(PD) Für jede Relation in der Punktklasse Δ_n^1 und mit Fasern von zweiter Kategorie existiert eine injektive Parametrisierung der Komplexität Δ_n^1 .

Dieses Korollar verallgemeinert eine von Mauldin [1979] konstruierte Borel-Parametrisierung. Am Schluß des dritten Kapitels befassen wir uns mit Relationen, die auf den ganzen Raum X definiert sind, den sogenannten Korrespondenzen. Für derartige Relationen beweisen wir folgendes Reflektions-Prinzip (Lemma 10):

(PD) Sei A eine Korrespondenz aus der projektiven Klasse Punktklasse $\prod_{2n+1}^1$ (bzw. Σ_{2n+2}^1) mit Fasern von zweiter Kategorie. Dann existiert eine Teilmenge $B \subset A$ aus der ambigen Klasse Δ_{2n+1}^1 (bzw. Δ_{2n+2}^1), ebenfalls mit Fasern von zweiter Kategorie.

Mit diesem Reflektionsprinzip wird in Theorem 4 eine von Cencer und Mauldin [1980] konstruierte Borel-Parametrisierung für coanalytische Korrespondenzen auf die ganze projektive Hierarchie verallgemeinert.

Falls die Uniformisierungen einer injektiven Parametrisierung die Relation ganz ausfüllen, spricht man von einer bijektiven Parametrisierung. Analog dem Beweis von Cencer-Mauldin [1980] für den coanalytischen Fall, wird mit Hilfe einer Schröder-Bernstein-Konstruktion folgender Existenzsatz für bijektive Parametrisierungen (Theorem 5) hergeleitet:

(PD) Sei A eine Korrespondenz aus der Punktklasse Π_{2n+1}^1 mit Fasern von zweiter Kategorie. Dann existiert eine bijektive Parametrisierung von A , die meßbar ist bezüglich der von Π_{2n+1}^1 erzeugten σ' -Algebra (analog für Σ_{2n+2}^1).

Im vierten Kapitel untersuchen wir die Frage nach der Existenz von sogenannten Heiratsparametrisierungen; das sind injektive Parametrisierungen, deren Uniformisierungen injektive Funktionen (Heiratsfunktionen) sind. In Theorem 6 geben wir eine Methode an, mit der aus einer Heiratsfunktion eine Heiratsparametrisierung konstruiert werden kann:

Falls jede Punktmenge einer hinreichend abgeschlossenen Punktklasse eine Heiratsfunktion besitzt, so existiert für jede dieser Punktmenngen eine Heiratsparametrisierung.

Die Anwendung dieses Satzes auf die bekannten Heiratssätze von Kaniewski-Rogers [79] und Graf-Mauldin [85] liefert parametrisierte Versionen derselben (Korrolar 6.1 bis 6.3). Durch den oben genannten Satz reduziert sich die Frage nach Heiratsparametrisierungen auf die nach Heiratsfunktionen. Zu letzterer wird mittels eines Reduktionsprinzips für Mengen von zweiter Kategorie (Lemma 12) folgende Teilantwort gegeben (Theorem 7):

(PD) Eine abzählbare Vereinigung von projektiven Rechtecken mit Fasern von zweiter Kategorie besitzt eine projektive Heiratsfunktion.

Unter stärkeren Determiniertheits-Voraussetzungen wird dieses Resultat im Theorem 8 auch auf überabzählbare Familien von Rechtecken ausgedehnt.

Zu allen genannten Parametrisierungssätzen werden auch die dualen Maßversionen bewiesen. Die Arbeit schließt mit Betrachtungen über die offene Kernfrage:

Besitzt jede projektive Relation mit hinreichend grossen Fasern eine projektive Heiratsfunktion?

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow, danke ich für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit.

Kap. I

Grundbegriffe der deskriptiven Mengenlehre

Eine Ordinalzahl ist die Menge aller kleineren Ordinalzahlen. ω bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen. Ist f eine Funktion von ω in eine Menge X , so ist insbesondere die Restriktion $f|n$ auf eine natürliche Zahl n gleich der endlichen Folge $(f(0), f(1), \dots, f(n-1))$. Die Menge aller endlichen 0-1-Folgen werde mit $\text{Seq}(2)$ bezeichnet. Die leere Folge erhält das Symbol $\langle \rangle$; $r^\wedge s$ bedeutet die Verkettung zweier Folgen $s, r \in \text{Seq}(2)$. Eine Funktion wird mit ihrem Graph identifiziert.

Ein metrisierbarer Raum heißt polnisch, falls er vollständig und separabel ist. Ein topologischer Raum ist perfekt, falls er keine isolierten Punkte enthält. Wir arbeiten in perfekten, polnischen Räumen. Typische Beispiele derartiger Räume sind:

- $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen,
- 2^ω der Cantor-Raum ($2 = \{0,1\}$ diskret und Produkttopologie),
- ω^ω der Bairesche Folgen-Raum (ω diskret und Produkttopologie),
- $C^{\mathbb{R}}(0,1)$ Raum der reellen stetigen Funktionen über $[0,1]$ mit Supremumnorm,
- $H(X)$ der Raum der kompakten, nichtleeren Teilmengen eines polnischen Raumes X mit Hausdorff-Metrik,
- das Produkt von zwei perfekten, polnischen Räumen,
- das Produkt eines perfekten, polnischen Raums mit ω (ω diskret).

Im Cantor-Raum oder im Baireschen Folgen-Raum sei durch $d(f,g) := 2^{-n}$, wobei n die kleinste Zahl ist mit $f(n) \neq g(n)$, eine Metrik gegeben.

Im folgenden seien $X, Y, Z, \dots$ stets Variable für perfekte, polnische Räume. Wir bezeichnen sie oft auch nur als Räume.

Eine Punktmenge ist eine Menge von Punkten eines Raumes. Soll der relationale Charakter einer Punktmenge A betont werden, schreiben wir $A(x)$ statt $x \in A$.

Eine Punktklasse Γ ist eine Funktion, die jedem Raum X eine Klasse $\Gamma(X)$

von Punktmengen im Raum X zuordnet. Wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, in welchem Raum X eine Punktmenge A zu betrachten ist, schreiben wir statt $A \in \Gamma(X)$ einfach $A \in \Gamma$. Die Schreibweise $\Gamma \subset \Gamma'$ bedeute, daß für alle Räume X gilt: $\Gamma(X) \subset \Gamma'(X)$.

Die Projektion einer Punktmenge $A \subset X \times P$ entlang des polnischen Raumes P sei definiert durch $\text{Proj}^P(A) := \{x \in X \mid \exists p \in P: (x, p) \in A\}$.

Die duale Projektion einer Punktmenge $A \subset X \times P$ entlang P ist definiert durch $\forall^P(A) := \{x \in X \mid \forall p \in P: (x, p) \in A\}$. Die Projektion von $A \subset X \times \omega$ entlang ω ist also die abzählbare Vereinigung der Mengen $A_i := \{x \mid (x, i) \in A\}$ und die duale Projektion der Durchschnitt dieser Mengen.

Für einen polnischen Raum P (auch für $P = \omega$) und eine Punktklasse Γ definieren wir die Punktklassen $\exists^P(\Gamma)$ und $\forall^P(\Gamma)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \exists^P(\Gamma)(X) &:= \{ \text{Proj}^P(B) \mid B \in \Gamma(X \times P) \} \\ \text{und} \\ \forall^P(\Gamma)(X) &:= \{ \forall^P(B) \mid B \in \Gamma(X \times P) \}. \end{aligned}$$

Für eine Punktklasse Γ sei $\Gamma^\wedge$ definiert durch $\Gamma^\wedge(X) := \{X - B \mid B \in \Gamma(X)\}$.

Obige Definitionen ermöglichen es, in allen Räumen gewisse ausgezeichnete Punktklassen zu definieren.

Die Borel-Hierarchie besteht aus den Punktklassen Σ_α^0 und Π_α^0 ($\alpha < \aleph_1$), die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^0 &= \text{die Punktklasse der offenen Mengen eines Raumes } X \\ \Pi_\alpha^0 &= (\Sigma_\alpha^0)^\wedge \\ \Sigma_{\alpha+1}^0 &= \exists^\omega(\Pi_\alpha^0) \\ \Sigma_\lambda^0 &= \bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha^0 \quad \text{für Limeszahlen } \lambda. \end{aligned}$$

Die projektive Hierarchie (Lusin-Hierarchie) besteht aus den Punktklassen

$$\begin{aligned} \Sigma_n^1 \text{ und } \Pi_n^1 \quad (n \in \omega), \text{ wobei } \Pi_1^0 &= \Pi_0^1, \\ \Sigma_{n+1}^1 &= \exists^Y(\Pi_n^1) \quad \text{mit } Y = \omega^\omega, \\ \Pi_n^1 &= (\Sigma_n^1)^\wedge \quad \text{und} \\ \Delta_n^1 &= \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Σ_1^1 heißt die Punktklasse der analytischen Mengen, Π_1^1 die der

coanalytischen Mengen. Das Suslin-Theorem besagt:

$$\Delta_1^1 = \text{die Punktklasse der Borelmengen} = \bigcup \{ \Sigma_\alpha^0 \mid \alpha < \aleph_1 \}.$$

Die zu einer Punktklasse Γ gehörige ambige Klasse $\Gamma \cap \Gamma^*$ wird mit $\Delta(\Gamma)$ oder kurz nur mit Δ bezeichnet. In der Borel- und Lusin-Hierarchie gelten die strikten Inklusionen:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma_1^0 & & \Sigma_2^0 & & & & \\ & \searrow & \swarrow & & & & \\ & \Delta_2^0 & & \Delta_3^0 & & & \\ & \swarrow & \searrow & & & & \\ \Pi_1^0 & & \Pi_2^0 & & & & \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{ccccccc} & & \Sigma_1^1 & & \Sigma_2^1 & & \\ & \searrow & \swarrow & & \swarrow & \searrow & \\ & \Delta_1^1 & & \Delta_2^1 & & & \\ & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \\ & \Pi_1^1 & & \Pi_2^1 & & & \end{array} \quad \dots$$

Die Borelklassen Σ_α^0 bzw. Π_α^0 sind abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ($\exists^\omega$) bzw. abzählbaren Durchschnitten ($\forall^\omega$), die ambigen Borelklassen Δ_α^0 sind weiterhin noch abgeschlossen unter Komplementbildung.

Die projektiven Punktklassen haben folgende Abschlußseigenschaften:

$$\forall^Y(\Pi_n^1) \subset \Pi_n^1 \quad \text{und} \quad \exists^Y(\Sigma_n^1) \subset \Sigma_n^1 \quad (Y \text{ perfekt, polnisch}).$$

Jede projektive Punktklasse ist weiterhin abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und unter abzählbaren Durchschnitten.

Die projektiven Punktklassen sind abgeschlossen unter Borel-Substitution, d.h., für eine Borel-meßbare Funktion $f: X \rightarrow Y$ und eine projektive Punktklasse Γ gilt: $f^{-1}(A) \in \Gamma(X)$, falls $A \in \Gamma(Y)$.

Eine Punktmenge A hat die deskriptive Komplexität Γ , falls A in der Punktklasse Γ liegt.

Die simultane Definition der Borel- und Lusin-Klassen ermöglicht es, die Komplexität einer Punktmenge A durch einfaches Abzählen der alternierenden Quantoren in einer die Menge A definierenden Formel, zu bestimmen.

Üblicherweise wird die Determiniertheit einer Punktmenge mit der Existenz von Gewinnstrategien in gewissen Zwei-Personen-Spielen definiert *). Wir bevorzugen hier eine elegante geometrische Formulierung:

Eine Punktmenge $A \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ heißt determiniert, falls es eine stetige Funktion $f: \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ gibt, derart daß $\text{Graph}(f) \subset A$ oder $\text{Graph}(f) \cap A^T = \emptyset$ gilt. Hierbei sei $A^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$.

Eine Punktklasse Γ heißt determiniert (in Zeichen: $\text{Det}(\Gamma)$), wenn alle Punkt-mengen des Raumes $\omega^\omega \times \omega^\omega$, die in der Klasse Γ liegen, determiniert sind. Es gibt nichtdeterminierte Punkt-mengen; denn mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man $\omega^\omega \times \omega^\omega$ in zwei Mengen A und B zerlegen, so daß weder A noch B eine perfekte Teilmenge enthält (z.B. [Moschovakis 80; 2C.4]). Der Graph einer stetigen Funktion ist aber perfekt. Dagegen hat Martin gezeigt, daß alle Borel-Mengen des Raumes $\omega^\omega \times \omega^\omega$ determiniert sind.

Theorem: $\text{Det}(\Delta_1^1)$ [Martin 75]

Das Axiom der projektiven Determiniertheit (PD) besagt, daß alle projektiven Punktklassen determiniert sind.

Die Determiniertheit der projektiven Klassen Σ_n^1 ($n > 1$) kann nicht ohne Zusatzaxiome bewiesen werden [Harrington-Martin 78]. Dagegen hat Woodin

*) In der Formulierung von [Mycielsky 63] ist die Determiniertheit einer Punktmenge $A \subset \omega^\omega$ folgendermaßen definiert: zwei Spieler I und II spielen abwechselnd und unendlich lang natürliche Zahlen. Spieler I gewinnt, wenn die während eines Spielverlaufs entstehende Folge von natürlichen Zahlen ein Element von A ist; ansonsten gewinnt II das Spiel. A heißt determiniert, falls entweder I oder II eine Gewinnstrategie besitzt. Identifiziert man die Räume ω^ω und $\omega^\omega \times \omega^\omega$ miteinander, so kann die Äquivalenz der beiden Definitionen gezeigt werden (siehe z.B. [Blass 73] oder [Kechris 85]).

gezeigt, daß die projektive Determiniertheit relativ konsistent ist zur Theorie "ZFC + es gibt eine unbeschränkte Folge von Ramsey-Kardinalzahlen unterhalb von Θ " *). Kechris und Solovay [85] bewiesen weitere Konsistenzresultate von Determiniertheits-Hypothesen.

Die Determiniertheit der Punktklasse Δ_n^1 impliziert unter anderem folgende Regularitätseigenschaften einer Punktmenge $A \in \Sigma_n^1$:

- 1) A besitzt die Bairesche Eigenschaft [Kechris 73],
- 2) A ist universell meßbar [Kechris 73],
- 3) A ist abzählbar oder enthält eine perfekte Teilmenge (Martin, unveröffentlicht; vgl. [Moschovakis 80, 6.G.10]).

Selbst diese Regularitätseigenschaften können für $n > 1$ nicht ohne Zusatzaxiome bewiesen werden [Harrington-Martin 78]. Für $n=1$ folgen sie jedoch unmittelbar dem Martinschen Theorem $\text{Det}(\Delta_1^1)$, und sind klassische Eigenschaften analytischer Punktmengen. Das Axiom der projektiven Determiniertheit gibt der Lusin-Hierarchie eine Struktur, wie sie aus den klassischen Sätzen über die untersten projektiven Klassen bekannt ist.

*) Die Ordinalzahl Θ ist definiert als das Supremum aller Präwohlordnungen von ω^ω . Eine Kardinalzahl k heißt Ramsey, falls sie die Partitionseigenschaft $k \rightarrow (k)^k$ besitzt.

Kap.II Kategorie- und maßtheoretische Regularitäts-Eigenschaften
normierter und skaliertter Punktklassen.

Eine Funktion ϕ auf einer Punktmenge $A \subseteq X$ in die Ordinalzahlen heißt eine Norm auf A. Zu jeder Norm ϕ auf A assoziieren wir zwei Relationen $\leq_{\phi}^*$ und $<_{\phi}^*$, die wie folgt definiert sind:

$$x \leq_{\phi}^* y \iff x \in A \text{ und } (y \notin A \text{ oder } \phi(x) \leq \phi(y)) ,$$

$$x <_{\phi}^* y \iff x \in A \text{ und } (y \notin A \text{ oder } \phi(x) < \phi(y)) .$$

Falls die beiden Relationen – aufgefaßt als Teilmengen von $X \times X$ – aus einer Punktklasse Γ sind, so nennt man ϕ eine Γ -Norm auf A. Eine Punktklasse Γ heißt normiert, falls jede Punktmenge $A \in \Gamma$ eine Γ -Norm auf A besitzt. Der Begriff der Norm wurde von Moschovakis eingeführt; er bewies auch die folgenden drei Theoreme (siehe [Kechris-Moschovakis 76]).

Theorem Die Punktklassen Π_1^1 und Σ_2^1 sind normiert.

Theorem Falls die projektive Klasse Γ normiert ist, so ist $\Gamma^{\wedge}$ nicht normiert.

Erstes Periodizitäts Theorem [Addison-Moschovakis 68]

$\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$ impliziert, daß die Klassen Π_{2n+1}^1 und Σ_{2n+2}^1 normiert sind.

Im Hinblick auf obiges Periodizitäts-Theorem treffen wir folgende

Konvention: Das Symbol Γ bezeichne künftig stets eine der Punktklassen

Π_{2n+1}^1 bzw. Σ_{2n+2}^1 (new) und Δ bezeichne die zugehörige ambige Punktklasse Δ_{2n+1}^1 bzw. Δ_{2n+2}^1 .

Für eine Norm ϕ auf einer Punktmenge A und eine Ordinalzahl ν sei

$$A_{\nu}^{\phi} := \{ x \mid x \in A \text{ und } \phi(x) = \nu \}.$$

Lemma 1. Ist ϕ eine Γ -Norm auf einer Punktmenge $A \in \Gamma$, dann gilt für alle Ordinalzahlen ν stets $A_\nu^\phi \in \Delta$.

Beweis: Falls $A_\nu^\phi = \emptyset$, dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

Ansonsten wähle man $y \in A$ mit $\phi(y) = \nu$.

Wir zeigen i) $x \in A_\nu^\phi \iff x \leq_\phi^* y$ und $y \leq_\phi^* x$

ii) $x \in A_\nu^\phi \iff x \not\leq_\phi^* y$ und $y \not\leq_\phi^* x$

Die Relationen der rechten Seite sind aus der Klasse Γ bzw. $\Gamma^\wedge$; d.h. $A \in \Delta$.

ad.i) $x \leq_\phi^* y$ und $y \leq_\phi^* x$

$$\iff x \in A \text{ \& } \phi(x) \leq \phi(y) \text{ \& } (x \in A \implies \phi(y) \leq \phi(x))$$

$$\iff x \in A \text{ \& } \phi(x) = \nu$$

ad.ii) $x <_\phi^* y$ oder $y <_\phi^* x$

$$\iff x \in A \text{ \& } \phi(x) < \phi(y) \text{ oder } x \notin A \text{ oder } \phi(y) < \phi(x)$$

$$\iff x \notin A \text{ oder } \phi(x) \neq \phi(y). \quad \#$$

Lemma 2. Sei ϕ eine Γ -Norm auf einer Punktmenge $A \in \Gamma$, $B \subset A$ und $B \in \Delta$.

Dann ist $\phi|_B$ eine Γ -Norm auf B .

Beweis: $x \leq_{\phi|_B}^* y \iff x \in B \text{ \& } (y \notin B \text{ oder } \phi(x) \leq \phi(y))$

$$\iff x \in B \text{ \& } (y \notin B \text{ oder } x \leq_\phi^* y)$$

Die rechte Seite definiert eine Relation aus Γ . Entsprechend für $x <_{\phi|_B}^* y$. #

Definition: Eine Norm ϕ auf einer Punktmenge A heißt regulär, falls es eine Ordinalzahl δ gibt, so daß ϕ die Menge A surjektiv auf δ abbildet.

Lemma 3. Sei ϕ eine Γ -Norm auf einer Punktmenge A .

Dann existiert eine reguläre Γ -Norm auf A .

Beweis: Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A durch

$x \sim y \iff \phi(x) = \phi(y)$. Die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind durch

$[x] < [y] \iff \phi(x) < \phi(y)$ wohlgeordnet. Sei δ der Ordnungstyp dieser Wohlordnung und $[\psi]$ der zugehörige Ordnungs-Isomorphismus. Dann ist durch die Funktion $\psi: A \rightarrow \delta; x \mapsto [\psi](\{x\})$ eine reguläre Norm auf A gegeben.

Aus den Äquivalenzen $x \leq_{\psi}^* y \iff x \in A \text{ und } (y \notin A \text{ oder } \phi(x) \leq \phi(y))$,

$$x <_{\psi}^* y \iff x \in A \text{ und } (y \notin A \text{ oder } \phi(x) < \phi(y))$$

folgt, daß ψ eine Γ -Norm auf A ist. #

Lemma 4. Sei $\phi: A \rightarrow \delta$ eine reguläre Γ -Norm auf einer Punktmenge $A \in \Gamma$.

Dann gilt $\{x | x \in A \text{ und } \phi(x) < \lambda\} \in \Delta$ für alle $\lambda < \delta$.

Beweis: Da $\phi: A \rightarrow \delta$ surjektiv ist, existiert ein $y \in A$ mit $\phi(y) = \lambda$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \text{ und } \phi(x) < \lambda &\iff x \in A \text{ und } \phi(x) < \phi(y) \\ \iff x <_{\phi}^* y &\iff y \not\leq_{\phi}^* x \quad \# \end{aligned}$$

Im nächsten Theorem dehnen wir die σ -Additivität für das Ideals der mageren Mengen (1.Kategorie) auf bestimmte, von Normen induzierte Mengenfamilien aus. Um die duale Maßversion gleichzeitig mitbehandeln zu können, treffen wir folgende Konvention. Für einen Raum X sei $J(X)$ das σ -Ideal der Mengen erster Kategorie in X oder das σ -Ideal der Nullmengen eines σ -endlichen, nicht atomaren, vervollständigten Borel-Maßes auf X . Wir schreiben zuweilen J statt $J(X)$.

Theorem 1. ($\text{Det}(\Delta)$) Sei ϕ eine Γ -Norm auf einer Punktmenge $A \in \Gamma$.

Falls für alle Ordinalzahlen ν gilt $A_{\nu}^{\phi} \in J$, dann folgt $A \in J$.

Bemerkung: Unter der Länge von ϕ versteht man den Ordnungstyp von $\phi(A)$.

Das Kunen-Martin Theorem besagt unter anderem, daß jede Σ_1^1 -Norm abzählbare Länge hat [Moschovakis 80, 2G2]. Hiermit folgt im Falle $\Gamma = \Sigma_1^1$ die Behauptung aus der σ -Additivität des Ideals J .

Beweis von Theorem 1: Angenommen $A \notin J$. Wir können mit Lemma 3 voraussetzen, daß die Norm ϕ regulär ist. Sei λ die kleinste Ordinalzahl, derart daß $B := \bigcup \{A_\nu^\phi \mid \nu < \lambda\} \notin J$. Im Falle $A = B$ ist ϕ nach Voraussetzung eine Γ -Norm auf B . Andernfalls folgt mit Lemma 4, daß B eine Δ -Punktmenge ist und nach Lemma 2 ist $\phi|_B$ dann eine Γ -Norm auf B . Man definiere eine Relation $T \subset X \times X$ durch:

$$(x, y) \in T \iff x \in B \text{ \& \> } y \in B \text{ \& \> } \phi(x) \leq \phi(y) .$$

Da $T = \leq_\phi^* \cap (B \times B)$ ist, folgt $T \in \Gamma$. Man betrachte für $y \in B$ die Horizontalfaser

$$T^y = \{x \mid x \in B \text{ \& \> } \phi(x) \leq \phi(y)\} = \bigcup \{A_\nu^\phi \mid \nu \leq \phi(y)\} .$$

Da $\phi(y) < \lambda$ ist, folgt, daß für alle $y \in B$ die Fasern T^y in J liegen.

Da $T \in \Gamma$ und Δ determiniert ist, folgt mit den Regularitätseigenschaften 1 bzw. 2, daß T die Bairesche Eigenschaft besitzt bzw. meßbar ist. Nach dem Satz von Ulam-Kuratowski oder dem Satz von Fubini folgt, daß auch $T \subset X \times X$ mager bzw. vom Produktmaß null ist. Somit sind auch fast alle Vertikalfasern $T_x \in J$. Man wähle einen Punkt $x \in B$ mit $T_x \in J$. Dann gilt:

$$T_x = \{y \mid y \in B \text{ \& \> } \phi(x) \leq \phi(y)\} \quad \text{und}$$

$$T^x = \{y \mid y \in B \text{ \& \> } \phi(y) \leq \phi(x)\} .$$

Damit wäre $B = T_x \cup T^x \in J$, im Widerspruch zur Annahme. #

Definition: Sei A eine Punktmenge und $\overline{\phi} = (\phi_n)_{n \in \omega}$ eine Folge von Normen auf A . $\overline{\phi}$ heißt eine Skala auf A , falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- 1) falls $x_0, x_1, x_2, \dots \in A$ und für alle n und alle grossen i gilt $\phi_n(x_i) = \lambda_n$ (d.h. wenn die Folgen von Ordinalzahlen $(\phi_n(x_i))_{i \in \omega}$ schließlich konstant werden), dann konvergiert (x_i) gegen einen Punkt in A .
- 2) für $x, y \in A$ gilt: $\phi_n(x) \leq \phi_n(y) \implies \forall i < n: \phi_i(x) \leq \phi_i(y)$.

Eine Skala $\overline{\phi}$ auf einer Punktmenge A heißt eine Γ -Skala auf A , falls die beiden Relationen $\leq_\phi^*$ und $<_\phi^* \subset X \times X \times \omega$ in der Punktklasse Γ liegen.

Hierbei ist $\leq_\phi^* := \{(x, y, n) \mid x \in A \text{ \& \> } (y \notin A \text{ \& \> } \text{oder } \phi_n(x) \leq \phi_n(y))\}$ und

$$<_\phi^* := \{(x, y, n) \mid x \in A \text{ \& \> } (y \notin A \text{ \& \> } \text{oder } \phi_n(x) < \phi_n(y))\} .$$

Eine Punktklasse Γ heißt skaliert, falls jede Punktmenge $A \in \Gamma$ eine Γ -Skala besitzt.

Zweites Periodizitäts-Theorem [Kechris-Moschovakis 76]

Die Punktklassen Π_1^1 und Σ_2^1 sind skaliert.

$\text{Det}(\Delta_{2n}^1)$ impliziert, daß die Punktklassen Π_{2n+1}^1 und Σ_{2n+2}^1 skaliert sind.

Lemma 5. Sei ϕ eine Skala auf der Punktmenge A . Dann ist die Abbildung $\bar{\phi} : A \rightarrow (\text{Ordinalzahlen})^\omega$; $x \mapsto (\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots)$ eine Injektion.

Beweis: Sei $x, y \in A$ und für alle n gelte $\phi_n(x) = \phi_n(y)$. Dann ist die Folge $(\phi_n(x), \phi_n(y), \phi_n(x), \phi_n(y), \dots)$ konstant. Mit der Skalenbedingung 1) konvergiert die Folge $(x, y, x, y, \dots)$; d.h. $x = y$. #

Analog zu Lemma 2 beweist man folgendes

Lemma 6. Sei $\bar{\phi}$ eine Γ -Skala auf einer Punktklasse $A \in \Gamma$, $B \subset A$ und $B \in \Delta$. Dann ist $\bar{\phi}|_B$ eine Γ -Skala auf B .

Sei $A \in \Gamma$ und $\bar{\phi}$ eine Γ -Skala auf A . Eine Folge $(x_i) \subset A$ nennen wir $\bar{\phi}$ -konvergent, falls für alle $n \in \omega$ die Folgen $(\phi_n(x_i))_i$ schließlich konstant werden. Jede $\bar{\phi}$ -konvergente Folge konvergiert gegen einen Punkt in A . Nicht jede konvergente Folge ist $\bar{\phi}$ -konvergent, denn dann wäre A abgeschlossen. $\bar{\phi}$ -konvergente Folgen besitzen eine nützliche Limeseigenschaft:

Lemma 7. Sei $\bar{\phi}$ eine Γ -Skala auf $A \in \Gamma$ und $(x_i) \subset A$ eine $\bar{\phi}$ -konvergente Folge mit Grenzwert x^* . Dann gilt für alle n und alle grossen i : $\phi_n(x^*) = \phi_n(x_i)$.

Beweis: Für alle $i > k$ gelte $\phi_n(x_i) = \lambda_n$. Sei $A_n := \{y \mid \phi_n(y) = \lambda_n\}$.

Nach Lemma 1 und 6 ist $A_n \in \Delta$ und $\bar{\phi}|_{A_n}$ eine Γ -Skala auf A_n . Die Folge

$(x_i)_{i > k}$ ist $\bar{\phi}|_{A_n}$ -konvergent mit Limes $x^* \in A_n$; d.h. $\phi_n(x^*) = \lambda_n$. #

Theorem 2. ($\text{Det}(\Delta)$) Sei $\bar{\phi}$ eine Γ -Skala auf einer Punktmenge $A \in \Gamma$.

Falls für alle $x \in A$ ein n existiert, so daß $\{y \in A \mid \phi_n(y) = \phi_n(x)\} \in J$ ist, dann gilt $A \in J$.

Beweis : Angenommen A liegt nicht im Ideal J . Dann existiert nach Theorem 1 - angewandt auf die Γ -Norm ϕ_0 - ein Punkt $x_0 \in A$, derart daß gilt:

$A_0 := \{y \in A \mid \phi_0(y) = \phi_0(x_0)\} \notin J$. Nach Lemma 1 gilt $A_0 \in \Delta$, und mit

Lemma 2 ist $\phi_1|_{A_0}$ eine Γ -Norm auf A_0 . Gemäß Theorem 1 existiert $x_1 \in A_0$

derart, daß $A_1 := \{y \in A_0 \mid \phi_1(y) = \phi_1(x_1)\} \notin J$. Führt man induktiv so fort,

so erhält man eine Folge von Punkten $(x_0, x_1, \dots)$ und eine absteigende Folge

von Mengen $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \dots$ mit $A_n = \{y \in A_{n-1} \mid \phi_n(y) = \phi_n(x_n)\}$

und $A_n \notin J$. Hieraus folgt, daß für $i > n$ gilt: $\phi_n(x_i) = \phi_n(x_n)$.

Für alle n ist also die Folge $(\phi_n(x_i))_i$ schließlich konstant.

Nach der ersten Skalenbedingung konvergiert die Folge $(x_i)_{i \in \omega}$.

Sei $x^* = \lim x_i$. Dann folgt aus Lemma 7: $\phi_n(x^*) = \phi_n(x_n)$; d.h. es gilt für

alle n : $\{y \in A \mid \phi_n(y) = \phi_n(x^*)\} = A_n \notin J$. #

Definition: Sei A eine Punktmenge im Raum $X \times Y$. Für $x \in X$ heißt die Menge

$A_x := \{y \mid (x, y) \in A\}$ die Faser von A über x .

Die wesentliche Projektion einer Punktmenge $A \subset X \times Y$ ist definiert durch

$$P^*(A) = \{x \mid A_x \notin J\}.$$

Eine Punktklasse Γ heißt abgeschlossen unter wesentlicher Projektion, falls

für alle Punktmengen $A \in \Gamma$ gilt: $P^*(A) \in \Gamma$.

Theorem ($\text{Det}(\Delta)$) [Kechris 73]

Die Punktklassen Γ , $\Gamma^\wedge$ und Δ sind abgeschlossen unter wesentlicher Projektion.

Für $\Gamma = \Sigma_1^1$ wurde obiges Theorem ohne Determiniertheitsvoraussetzungen von Tanaka ([Tanaka 67]) bewiesen.

Eine Norm ϕ auf einer Menge A zerlegt A in eine wohlgeordnete Familie von

Partitionsklassen $A_{\vee}^{\phi}$. Falls A groß ist ($A \notin J$), so ist unter hinreichenden Determiniertheithypothesen wenigstens eine der Partitionsklassen groß (Theorem 1). Ist darüberhinaus die Menge A skaliert, so zeigt das folgende Spaltungs-Lemma, daß es eine Norm der Skala gibt, unter deren Partitionsklassen sogar zwei grosse Exemplare zu finden sind.

Definition: Eine Norm ϕ auf A spaltet die Menge A , falls es zwei Ordinalzahlen $\alpha < \beta$ gibt, derart daß $\{x \in A \mid \phi(x) = \alpha\} \notin J$ und $\{x \in A \mid \phi(x) = \beta\} \notin J$.

Spaltungs-Lemma 8. ($\text{Det}(\Delta)$) Sei $A \notin J$ und $\overline{\phi}$ eine Γ -Skala auf A . Dann existiert eine natürliche Zahl m , so daß die Norm ϕ_m die Menge A spaltet.

Beweis: Nach Theorem 2 existiert $x \in A$ derart, daß für alle $m \in \omega$
 $A_m := \{y \in A \mid \phi_m(y) = \phi_m(x)\} \notin J$. Da $A_1 \in \Delta$, ist nach Lemma 6 $\phi|_{A_1}$ eine Γ -Skala auf A_1 und mit Lemma 5 folgt $\bigcap_m A_m = \{x\}$. Aus $A_1 \notin J$, $\{x\} \in J$ und $A_1 = \{x\} \cup \bigcup_m (A_1 - A_m)$ folgt mit der σ -Additivität von J , daß es ein m gibt, so daß $(A_1 - A_m) \notin J$. Da $A_1, A_m \in \Delta$, ist ϕ_m eine Γ -Norm auf $(A_1 - A_m)$. Nach Theorem 1 existiert eine Ordinalzahl β , so daß $\{y \in A \mid \phi_m(y) = \beta\} \notin J$.
 Mit $\alpha = \phi_m(x)$ haben wir: $\{y \in A \mid \phi_m(y) = \alpha\} \notin J$ und $\alpha \neq \beta$. #

Lemma 9. ($\text{Det}(\Delta)$) Eine Γ -Norm ϕ auf $A \in \Gamma$ spaltet A genau dann, wenn ein Punkt $x \in A$ existiert, so daß gilt:
 $\{y \in A \mid \phi(y) = \phi(x)\} \notin J$ und $\{y \in A \mid \phi(y) < \phi(x)\} \notin J$.

Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Für die umgekehrte Richtung setze man $\alpha = \phi(x)$. Da $\{y \in A \mid \alpha < \phi(y)\} \notin J$ existiert nach Theorem 1 ein β , so daß $\{x \in A \mid \phi(x) = \beta\} \notin J$. Es gilt $\alpha \neq \beta$. #

Sei A eine Relation im Produkt zweier polnischer Räume $X \times Y$. Eine Uniformisierung von A ist eine Funktion $F: \text{Proj}^Y(A) \rightarrow Y$, deren Graph in der Menge A liegt.

Eine mit Punkten z aus einem Parameter-Raum Z indizierte Familie $(F_z)_{z \in Z}$ von Uniformisierungen nennt man eine injektive Parametrisierung von A , falls falls $\text{Graph}(F_z) \cap \text{Graph}(F_{z'}) = \emptyset$ für alle $z \neq z'$. Für deskriptive Betrachtungen ist es einfacher, den Graphen der zweistelligen Funktion $F_z(x)$ zu untersuchen. Daher folgende

Definition: Sei $A \subset X \times Y$. Eine Relation $T \subset X \times Y \times Z$ heißt eine injektive Parametrisierung von A mit Parameterraum Z , falls für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ und $z, z' \in Z$ gilt:

- 1) $\exists_1 y : T(x, y, z)$
- 2) $(z \neq z' \ \& \ T(x, y, z) \ \& \ T(x, y', z')) \implies y \neq y'.$
- 3) $T(x, y, z) \implies A(x, y)$

Theorem 3. $(\text{Det}(\Delta))$

Sei $A \subset X \times Y$ und $A \in \Gamma$; für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ gelte: $A_x \notin J$.

Dann existiert eine injektive Parametrisierung $T \in \Gamma$ von A mit Parameter-Raum 2^ω .

Beweis: Nach dem zweiten Periodizitäts-Theorem existiert eine Γ -Skala $\overline{\Phi}$ auf A .

Wie man leicht nachweist, ist für $x \in \text{Proj}^Y(A)$ die Funktion $\overline{\Phi}(x, \cdot)$ eine Γ -Skala auf der Faser A_x . Für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ und alle $s \in \text{Seq}(2)$ definieren wir induktiv, über die Länge von s , natürliche Zahlen $m_x(s)$, Ordinalzahlen $\lambda_x(s)$ und Mengen $A_x(s)$ wie folgt:

- 1) $m_x(\langle \rangle) = 0$; $\lambda_x(\langle \rangle) = 0$; $A_x(\langle \rangle) = A_x$.
- 2) $m_x(s^{\wedge} 0) =$ das kleinste $m > m_x(s)$, so daß $\Phi_m(x, \cdot)$ die Menge $A_x(s)$ spaltet.
 $\lambda_x(s^{\wedge} 0) =$ das kleinste λ derart, daß $\{ y \in A_x(s) \mid \Phi_{m(s^{\wedge} 0)}(x, y) = \lambda \} \notin J$
 $A_x(s^{\wedge} 0) = \{ y \in A_x(s) \mid \Phi_{m(s^{\wedge} 0)}(x, y) = \lambda_x(s^{\wedge} 0) \}.$

$$3) \quad m_x(s^{\wedge}1) = m_x(s^{\wedge}0)$$

$\lambda_x(s^{\wedge}1) =$ das zweitkleinste λ , so daß $\{ y \in A_x(s) \mid \phi_{m_x}(s^{\wedge}1)(x,y) = \lambda \} \notin J$

$$A_x(s^{\wedge}1) = \{ y \in A_x(s) \mid \phi_{m_x}(s^{\wedge}1) = \lambda_x(s^{\wedge}1) \}.$$

Für alle $s \in \text{Seq}(2)$ ist nach Lemma 1 $A_x(s^{\wedge}i) \in \Delta$ ($i=0,1$). Mit Lemma 6 ist

$\overline{\phi}(x, \cdot) \upharpoonright A_x(s)$ eine Γ -Skala auf $A_x(s)$. Iterative Anwendung des Spaltungs-

Lemmas auf die Mengen $A_x(s)$ zeigt, daß die Zahlen $m_x(s)$ und $\lambda_x(s)$ wohl-

definiert sind. Weiterhin gilt: i) $A_x(s) \notin J$

$$\text{ii) } A_x(s^{\wedge}0) \cap A_x(s^{\wedge}1) = \emptyset$$

$$\text{iii) } A_x(s) \supset A_x(s^{\wedge}i) \quad (i=0,1).$$

Wir definieren nun noch eine Relation $T \subset X \times X \times 2^{\omega}$ durch

$$T(x, y, z) \iff \forall n : y \in A_x(f \upharpoonright n)$$

und zeigen zunächst, daß T eine injektive Parametrisierung ist. Sei hierzu ϕ_k

eine Norm der Skala $\overline{\phi}$, $x \in \text{Proj}^I(A)$ und $f \in 2^{\omega}$. Da $A_x(f \upharpoonright k)$ nach i) nicht leer

ist, können wir für alle $k \in \omega$ einen Punkt $y_k \in A_x(f \upharpoonright k)$ wählen.

Aus der Definition von $m_x(s)$ ergibt sich $k \leq m_x(f \upharpoonright k)$. Mit der Skalenbedingung

2) folgt für alle $y \in A_x$:

$$\phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y) \leq \phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y_k) \implies \phi_k(x, y) \leq \phi_k(x, y_k) \text{ und}$$

$$\phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y_k) \leq \phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y) \implies \phi_k(x, y_k) \leq \phi_k(x, y).$$

Sei $\lambda_k := \phi_k(x, y_k)$. Für alle $y \in A_x(f \upharpoonright k)$ gilt $\phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y) = \phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y_k)$ und daher

mit obigen Ungleichungen $\phi_k(x, y) = \lambda_k$. Da $A_x(f \upharpoonright k) \supset A_x(f \upharpoonright k+1) \supset A_x(f \upharpoonright k+2) \dots$

gilt, ist für alle $i > k : \phi_k(x, y_i) = \lambda_k$. Da k beliebig war, ist für

jedes $k \in \omega$ die Folge der Ordinalzahlen $(\phi_k(x, y_i))_{i \in \omega}$ schließlich konstant.

Mit der ersten Skaleneigenschaft ergibt sich, daß die Folge $(x, y_i)_i$ in A

konvergiert. Sei $\lim (x, y_i) = (x, y^*)$. Die Folge $(x, y_i)_i$ ist $\overline{\phi}$ -konvergent,

und daher folgt mit Lemma 7, daß für alle k gilt $\phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y^*) = \phi_{m_x(f \upharpoonright k)}(x, y_k)$.

Der Punkt y^* ist also Element von $\bigcap_k A_x(f \upharpoonright k)$.

Sei z^* ein weiterer Punkt aus $\bigcap_k A_x(f \upharpoonright k)$.

Für $i \leq m_x(f \upharpoonright k)$ folgt mit der 2. Skalenbedingung: $\phi_i(x, z^*) = \phi_i(x, y^*)$. Da

die Folge $(m_x(f \upharpoonright k))_k$ cofinal in ω liegt, gilt für alle i $\phi_i(x, y^*) = \phi_i(x, z^*)$;

Aufgrund der Injektivität der Skalierung gilt dann $y^* = x^*$. Wir haben damit bewiesen: $\forall f \in 2^\omega \quad \forall x \in \text{Proj}^Y(A) \quad \exists y^*: T(x, y^*, f) \text{ und } y^* \in A_x$.

Sei nun $f, g \in 2^\omega$, $f \neq g$, $x \in \text{Proj}^Y(A)$ und es gelte $T(x, y^*, f)$ und $T(x, z^*, g)$.

Sei m das kleinste n mit $f(n) \neq g(n)$ und o.B.d.A. $f(m)=0$ und $g(m)=1$.

Dann gilt: $y^* \in A_x(f|_m^0)$ und $z^* \in A_x(f|_m^1)$. Mit ii) folgt $y^* \neq z^*$.

Falls schließlich $T(x, y, f)$ gilt, so folgt unmittelbar aus der Definition von T , daß der Punkt (x, y) in A liegt.

Wir haben bisher gezeigt, daß T eine injektive Parametrisierung von A mit Parameterraum 2^ω ist.

Für Komplexitätsbetrachtungen ist es notwendig, die Definition von T formal auszuschreiben. Wir definieren hierzu eine Relation $S \subset X \times Y \times \text{Seq}(2) \times \omega$, für die gilt: $T(x, y, f) \iff \forall n \exists m : S(x, y, f|_n, m)$.

Wir werden weiterhin zeigen, daß die Relation S in der Punktklasse Γ liegt. Aus der Abgeschlossenheit von Γ unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten, folgt dann unmittelbar, daß auch T in der Klasse Γ liegt.

$$1) \quad S(x, y, \langle \rangle, m) \iff m=0 \text{ und } (x, y) \in A$$

$$2) \quad S(x, y, s^0, m) \iff \exists n < m : S(x, y, s, n)$$

$$\text{und } \{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y') = \phi_m(x, y) \} \notin J$$

$$\text{und } \{ y' \in A_x \mid \phi_n(x, y') = \phi_n(x, y) \text{ und } \phi_m(x, y') > \phi_m(x, y) \} \notin J$$

$$\text{und } \{ y' \in A_x \mid \phi_n(x, y') = \phi_n(x, y) \text{ und } \phi_m(x, y') < \phi_m(x, y) \} \in J$$

$$\text{und } \forall k: n < k < m \implies \{ y' \in A_x \mid \phi_n(x, y') = \phi_n(x, y) \text{ und } \phi_k(x, y') > \phi_k(x, y) \} \in J$$

$$3) \quad S(x, y, s^1, m) \iff \exists n < m : S(x, y, s, n)$$

$$\text{und } \{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y') = \phi_m(x, y) \} \notin J$$

$$\text{und } \{ y' \in A_x \mid \phi_n(x, y') = \phi_n(x, y) \text{ und } \phi_m(x, y') < \phi_m(x, y) \} \notin J$$

$$\text{und } \forall y_0 : [\phi_n(x, y_0) = \phi_n(x, y) \text{ und } \phi_m(x, y_0) < \phi_m(x, y) \text{ und}$$

$$\{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y') = \phi_m(x, y_0) \} \notin J. \implies$$

$$S(x, y_0, s^1, m) \text{ und } \{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y_0) < \phi_m(x, y') < \phi_m(x, y) \} \in J].$$

Mit Hilfe von Theorem 1 und Lemma 9 zeigt man leicht, daß $yeA_x(s)$ genau dann gilt, wenn ein $m \in \omega$ existiert mit: $S(x, y, s, m)$. Denn im Punkt 2) obiger Definition besagen die dritte und vierte Zeile, daß die Norm ϕ_m die Menge $A_x(s)$ spaltet; die fünfte Zeile garantiert die Minimalität von m . Setzt man $\lambda_x(s^{\wedge} 0) = \phi_m(x, y)$, so erzwingt die zweite Zeile die Minimalität von $\lambda_x(s^{\wedge} 0)$. Entsprechend bedeuten die Zeilen 4 bis 6 im Punkt 3), daß y in der zweitkleinsten Partitionsklasse von $\phi_m|A_x(s)$ liegt, die kein Element von J ist. Um die deskriptive Komplexität von S zu berechnen, betrachten wir zunächst die Relationen R und R^* , definiert durch

$$R(x, y, m) \iff (x, y) \in A \ \& \ \{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y') = \phi_m(x, y) \} \notin J$$

$$R^*(y', x, y, m) \iff (x, y) \in A \ \& \ (x, y') \in A \ \& \ \phi_m(x, y') = \phi_m(x, y).$$

Da R die wesentliche Projektion von R^* ist, und R^* nach Lemma 1 in der Punkt-klasse Γ liegt, folgt, daß auch R in Γ liegt. Analog zeigt man für alle Relationen in der Definition von S , die von der Form $\{y' \mid \dots\} \notin J$ oder von der Form $\{y' \mid \dots\} \in J$ sind (die Voraussetzung $(x, y) \in A$ ist mit 1) stets gegeben), daß sie in Γ liegen.

Beachtet man noch die Abgeschlossenheit der Klasse Γ unter abzählbaren Durchschnitten ($\bigcap^\omega$) und abzählbaren Vereinigungen ($\bigcup^\omega$), so folgt:

ist die Relation $S(., ., s, .) \in \Gamma$, so ist $S(., ., s^{\wedge} 0, .) \in \Gamma$ und $S(., ., s^{\wedge} 1, .) \in \Gamma$.

Falls Γ eine multiplikative Klasse Π_n^1 ist, so ergibt sich mit der Abgeschlossenheit von Γ unter $\exists^Y$ und der Tatsache $S(., ., \langle \rangle, .) \in \Gamma$, daß für alle $s \in \text{Seq}(2)$ die Relationen $S(., ., s, .)$ in der Klasse Γ liegen. Identifiziert man $\text{Seq}(2)$ rekursiv mit ω und bedenkt, daß ω die diskrete Topologie trägt, so folgt: $S \in \Gamma$.

Im Falle $\Gamma = \Sigma_n^1$ schreibt man den Punkt 3) der Definition von S in folgende äquivalente Form:

$$3') \quad S(x, y, s^{\wedge} 1, m) \iff \exists n < m : \quad S(x, y, s, n)$$

$$\text{und } \{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y') = \phi_m(x, y) \} \notin J$$

$$\text{und } \exists y_o : \quad \phi_m(x, y_o) < \phi_m(x, y) \text{ und}$$

$$S(x, y_o, s^{\wedge} 0, m) \text{ und } \{ y' \in A_x \mid \phi_m(x, y_o) < \phi_m(x, y') < \phi_m(x, y) \} \in J$$

Da Σ_n^1 unter der Operation $\exists^y$ abgeschlossen ist, folgt wie im ersten

Fall: $S \in \Gamma$. #

Führt man obige Komplexitätsbetrachtungen für den Spezialfall $A \in \Delta$ aus, so zeigt sich, daß auch die Parametrisierung T aus der ambigen Klasse Δ gewählt werden kann. Denn zunächst ist $S(.,.,\langle \rangle,.)$ aus Δ . Die Abgeschlossenheit von Δ unter wesentlicher Projektion und die Äquivalenz von 3) und 3') liefert für alle $s \in \text{Seq}(2)$: $S(.,.,s,.) \in \Delta$. Hieraus folgt: $T \in \Delta$.

Wir erhalten somit folgendes

Korollar 3.1: ($\text{Det}(\Delta)$) Sei $A \in \Delta$ und für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ gelte $A_x \notin J$. Dann besitzt A eine injektive Parametrisierung $T \in \Delta$ mit Parameterraum 2^ω .

Definition: Sei $A \subset X \times Y$. Eine Teilmenge U von A heißt eine Uniformisierung von A , falls es für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x,y) \in U$.

Das Uniformisierungs-Theorem von Moschovakis [71] - eine Verallgemeinerung des Satzes von Kondo-Novikov - besagt, daß unter der Hypothese $\text{Det}(\Delta)$ für alle $A \in \Gamma$, $A \subset X \times Y$ eine Uniformisierung $U \in \Gamma$ existiert. Falls die Fasern von A groß sind, dann existieren nach Theorem 3 sogar 2^ω viele, paarweise disjunkte Γ -Uniformisierungen von A . Unser nächstes Theorem zeigt, daß die Uniformisierungen aus der ambigen Punktklasse Δ gewählt werden können, falls die Relation A auf den ganzen Raum definiert ist. Wir benötigen jedoch noch das folgende Reflektions-Lemma, welches für den Fall $\Gamma = \Pi_1^1$ schon von Cenzer und Mauldin [80,Th.4.2] bewiesen wurde.

Lemma 10. (Det(Δ)) Sei $A \subset X \times Y$ eine Korrespondenz mit $A \in \Gamma$ und für alle $x \in X$ gelte $A_x \notin J$. Dann existiert eine Teilmenge $B \subset A$ mit $B \in \Delta$ derart, daß für alle $x \in X$ gilt: $B_x \notin J$.

Beweis: Nach dem ersten Periodizitäts-Theorem existiert eine Γ -Norm ϕ auf A .

Sei $B := \{(x, y) \mid \{y' \mid (x, y') \leq_{\phi}^* (x, y) \text{ und } (x, y) \leq_{\phi}^* (x, y')\} \notin J\}$.

Dann gilt: $(x, y) \in B \iff \{y' \mid (x, y) \in A \text{ und } (x, y') \in A \text{ und } \phi(x, y') = \phi(x, y)\} \notin J$.

Hieraus ergibt sich, daß B eine Teilmenge von A ist, und es folgt:

$B = \{(x, y) \mid \{y' \mid (x, y') \leq_{\phi}^* (x, y) \text{ und } (x, y) \leq_{\phi}^* (x, y')\} \notin J\}$.

Aus den beiden Definitionsgleichungen von B folgt nun, daß B in der ambigen

Klasse Δ liegt. Für alle $x \in X$ ist $A_x \notin J$, $A_x \in \Gamma$ und $\phi(x, \cdot)$ eine Γ -Norm auf

A_x . Nach Theorem 1 existiert ein $y \in A_x$ mit $\{y' \mid \phi(x, y) = \phi(x, y')\} \notin J$;

das heißt: $B_x \neq \emptyset$. Aus der Definition von B folgt dann unmittelbar:

$B_x \notin J$. #

Im folgenden wollen wir auch den funktionalen Aspekt von Uniformisierungen und Parametrisierungen in unsere Untersuchungen mit einbeziehen. Daher folgende

Definition: Sei $\mathcal{A}$ eine Punktklasse. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt $\mathcal{A}$ -meßbar, falls $f^{-1}(N) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Teilmengen des Raumes X .

Das folgende Theorem wurde für $\Gamma = \Pi_1^1$ von Cenzer-Mauldin [80, Th.6.1] bewiesen.

Theorem 4. (Det(Δ)) Sei $A \subset X \times Y$ eine Korrespondenz mit $A \in \Gamma$; für alle x gelte $A_x \notin J$. Dann existiert eine injektive Parametrisierung T von A mit Parameterraum Y und $T \in \Delta$. Weiterhin ist für jedes $z \in Y$ die Funktion $F_z := \{(x, y) \mid T(x, y, z)\}$ eine Δ -meßbare Uniformisierung von A und für alle $x \in X$ die Funktion $G_x := \{(z, y) \mid T(x, y, z)\}$ eine Δ -meßbare Injektion von Y in die Faser A_x .

Beweis: Nach Lemma 10 existiert eine Teilmenge $B \subseteq A$ mit $B \in \Delta$ und $\forall x: B_x \notin J$.

Mit Corollar 3.1 erhält man eine injektive Parametrisierung T' von B mit Parameterraum 2^ω und $T' \in \Delta$. Natürlich ist T' auch eine injektive Parametrisierung von A . Sei g ein Borelisomorphismus von Y auf 2^ω . Dann ist $T(x,y,z) := T'(x,y,g(z))$ eine injektive Parametrisierung mit Parameterraum Y und $T \in \Delta$.

Für alle $z \in Y$ ist $F_z = \{(x,y) \mid T(x,y,z)\}$ eine Uniformisierung von A und es gilt $F_z \in \Delta$. Sei N eine offene Teilmenge von Y . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in F_z^{-1}(N) &\iff \exists y: ((x,y) \in F_z \text{ und } y \in N) \\ &\iff \forall y: ((x,y) \in F_z \implies y \in N). \end{aligned}$$

F_z ist also eine Δ -meßbare Funktion. Entsprechend ist auch die Funktion G_x Δ -meßbar. Die Injektivität von G_x folgt unmittelbar aus der Definition einer Parametrisierung. #

Mit einer Schröder-Bernstein-Konstruktion, wie sie auch in [Cencer-Mauldin 78] benutzt wurde, kann man erreichen, daß die mit Punkten $y \in Y$ indizierten Uniformisierungen die Relation A ganz ausfüllen. Dies geht allerdings auf Kosten der Komplexität der Parametrisierung.

Definition: Für eine Punktklasse Γ sei $\sigma(\Gamma)$ wie folgt definiert:

$$\sigma(\Gamma)(X) := \{A \subseteq X \mid \text{die Punktmenge } A \text{ liegt in der } \sigma\text{-Algebra, die von den Teilmengen } B \subseteq X \text{ mit } B \in \Gamma(X) \text{ erzeugt wird}\}.$$

In der Lusin-Hierarchie gelten folgende strikte Inklusionen:

$$\begin{array}{c} \Sigma_n^1 \\ \cap \\ \Pi_n^1 \end{array} \subset \sigma(\Sigma_n^1) = \sigma(\Pi_n^1) \subset \Delta_{n+1}^1.$$

Lemma 11. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Δ -meßbare Injektion und die Menge $A \subset X$ sei aus der Punktklasse $\mathcal{O}(\Gamma)$. Dann gilt: $f(A) \in \mathcal{O}(\Gamma)$.

Beweis: Falls $\Gamma = \Sigma_n^1$ und $A \in \Gamma$, dann folgt mit der Äquivalenz

$$y \in f(A) \iff \exists x: x \in A \text{ und } f(x) = y$$

und der Abgeschlossenheit von Σ_n^1 unter $\exists^X$ unmittelbar: $f(A) \in \Gamma \subset \mathcal{O}(\Gamma)$.

$\Gamma = \Pi_n^1$ wird durch die Identität $f(A) = f(X) - f(X-A)$ auf obigen Fall zurückgeführt.

Falls mit A_i ($i=1,2,3,\dots$) auch $f(A_i)$ in $\mathcal{O}(\Gamma)$ liegt, dann folgt:

$$f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i) \in \mathcal{O}(\Gamma) \quad \text{und}$$

$$f(X-A_1) = f(X) - f(A_1) \in \mathcal{O}(\Gamma).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. #

Lemma 12. ($\text{Det}(\Delta)$) Eine $\mathcal{O}(\Gamma)$ -meßbare Funktion ist Baire-meßbar und universell meßbar.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den im ersten Kapitel angegebenen Regularitätseigenschaften determinierter Punktklassen. #

Definition: Sei $A \subset X \times Y$. Eine Bijektion $F: X \times Y \rightarrow A$ heißt eine bijektive Parametrisierung von A , falls für alle $x \in X$ die Funktion $F(x, \cdot)$ den Raum Y auf die Faser A_x abbildet.

Der coanalytische Spezialfall des folgenden Theorems wurde von Cenzer und Mauldin [80, Th.6.1, Th.6.2] bewiesen.

Theorem 5. ($\text{Det}(\Delta)$) Sei $A \subset X \times Y$, $A \in \Gamma$ und es gelte für alle $x \in X$: $A_x \notin J$.

Dann existiert eine $\sigma(\Gamma)$ -meßbare bijektive Parametrisierung von A .

Beweis: Nach Theorem 4 existiert eine injektive Parametrisierung T von A mit $T \in \Delta$. Die Funktion $F: X \times Y \rightarrow A$ sei definiert durch: $(x, y) \mapsto (x, y')$, wobei y' das eindeutig bestimmte z ist mit $T(x, z, y)$. Dann ist F eine Δ -meßbare Injektion. Man setze: $B = F(X \times Y)$

$$S^0 = A - B$$

$$T^0 = (X \times Y) - A.$$

Sei weiterhin F^n die n -fach iterierte Funktion F und

$$S^n = F^n(S^0)$$

$$T^n = F^n(T^0)$$

$$D = \bigcap_{n \in \omega} F^n(B).$$

Dann läßt sich $X \times Y$ folgendermaßen als disjunkte Vereinigung schreiben:

$$\begin{aligned} X \times Y &= S^0 \cup T^0 \cup B \\ &= S^0 \cup T^0 \cup S^1 \cup T^1 \cup S^2 \cup T^2 \dots \cup D. \end{aligned}$$

Man definiere:

$$G(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{falls } (x, y) \in D \cup \bigcup S^n \\ F(x, y), & \text{falls } (x, y) \in \bigcup T^n. \end{cases}$$

Dann ist $G: X \times Y \rightarrow A$ eine Injektion, deren erste Koordinate die Identität ist. Da $A = S^0 \cup S^1 \cup T^1 \cup S^2 \cup T^2 \dots \cup D$ und G bijektiv auf den einzelnen Gliedern ist, folgt, daß G eine bijektive Parametrisierung von A ist.

Nach Lemma 11 sind die Mengen S^n , T^n und D aus der Punktklasse $\sigma(\Gamma)$.

Sei N offen in $X \times Y$; dann gilt:

$$\begin{aligned} G^{-1}(N) &= G^{-1}(N \cap (D \cup \bigcup_n S^n)) \cup G^{-1}(N \cap \bigcup_n T^n) \\ &= (N \cap (D \cup \bigcup_n S^n)) \cup G^{-1}(N \cap \bigcup_n T^n). \end{aligned}$$

Daraus folgt: G ist $\sigma(\Gamma)$ -meßbar. #

Kap. IV Parametrisierung mittels Heiratsfunktionen

Definition: Sei $A \subset X \times Y$. Eine injektive Uniformisierung von A heißt eine Heiratsfunktion für A . Wir nennen eine injektive Parametrisierung H von A mit Parameter-Raum Y eine Heiratsparametrisierung, falls für alle $z \in Y$ die Uniformisierungen $H_z := \{(x,y) \mid H(x,y,z)\}$ Heiratsfunktionen für A sind.

Theorem 6. Seien Λ , Θ und Ψ Punktklassen. Λ und Θ sei abgeschlossen unter Borel-Substitution. Falls es für alle $B \subset X \times Y$ mit $B \in \Lambda$ und Fasern $B_x \in \Psi$ eine Heiratsfunktion aus der Klasse Θ gibt, dann besitzt jede derartige Relation eine Heiratsparametrisierung aus der Punktklasse Θ .

Beweis: Sei eine Relation $A \subset X \times Y$ mit $A \in \Lambda$ und $A_x \in \Psi$ gegeben und sei $g: X \times Y \rightarrow X$ ein Borel-Isomorphismus. Man setze

$$B := \{(g(x,z), y) \mid (x,y) \in A \text{ und } z \in Y\}.$$

Dann ist $B \in \Lambda$ und für alle $x \in X$ gilt $B_x \in \Psi$. Nach Voraussetzung existiert eine injektive Uniformisierung F von B mit $F \in \Theta$. Sei

$$H = \{(x,y,z) \mid (g(x,z), y) \in F\}.$$

Dann ist $H \in \Theta$ und es gilt für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$: für alle $z \in Y$ existiert genau ein y mit $H(x,y,z)$; da $y \in B_{g(x,z)}$, folgt aus der Definition von B , daß y in der Faser A_x liegt. Wegen der Injektivität von $F \circ g$ in z ist H eine injektive Parametrisierung von A . Da H_z der Graph der Funktion $F(g(\cdot, z))$ ist, folgt, daß H eine Heiratsparametrisierung von A ist. #

Korollar 6.1 (V=L) Sei $A \subset X \times Y$ eine Σ_n^1 -Relation ($n \geq 2$), so daß für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ und alle $y \in \text{Proj}^X(A)$ sowohl die Vertikalfasern A_x als auch die Horizontalfasern A^y von A überabzählbar sind. Dann existieren Heiratsparametrisierungen von A und von A^T aus der Punktklasse Σ_{n+1}^1 .

Beweis: Unter Voraussetzung des Gödelschen Konstruktibilitätsaxioms "V=L" existiert nach [Kaniewski-Rogers 80, Th.3] für eine Σ_n^1 -Relation mit überabzählbaren Horizontal- und Vertikalfasern eine bijektive Uniformisierung $H: \text{Proj}^Y(A) \rightarrow \text{Proj}^X(A)$ aus der Punktklasse Σ_{n+1}^1 . Man wende obiges Theorem auf die Uniformisierungen H bzw. H^{-1} an. #

Korollar 6.2 (MA) Sei λ ein nichtatomares Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum Y und $A \subset X \times Y$ eine Borelmenge. Für alle $x \in X$ gelte $\lambda(A_x) > 0$. Dann existiert eine universell meßbare Heiratsparametrisierung von A .

Beweis: Unter Voraussetzung des Martinschen Axioms "MA" existiert nach [Graf-Mauldin 85, Th.5.1] eine universell meßbare, injektive Uniformisierung $F: X \times Y \rightarrow Y$ der Borelmenge $B = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A \text{ und } zeY\}$. Der Graph von F ist die gesuchte Heiratsparametrisierung. #

Korollar 6.3 Seien λ und μ nichtatomare Wahrscheinlichkeitsmaße auf den Räumen X beziehungsweise Y . Sei weiterhin $A \subset X \times Y$ eine Borel-Menge derart, daß λ -fast alle Fasern A_x überabzählbar sind. Dann existiert eine Borel-Menge $B \subset X$ mit $\lambda(B)=1$ und eine Borelsche Heiratsparametrisierung H von $A \cap (B \times Y)$, deren Wertebereich $\{y \mid \exists x \in B \exists zeY: H(x, y, z)\}$ eine μ -Nullmenge ist.

Obiges Korollar verschärft ein Theorem von Graf-Mauldin [85,Th.4.2] dahingehend, daß die dort konstruierten, $2^{\aleph_0}$ vielen, injektiven Uniformisierungen in meßbarer Weise parametrisiert werden. Bemerkenswert ist auch, daß die Definitionsbereiche der einzelnen Uniformisierungen H_z unabhängig vom Parameter z sind.

Beweis: Sei $C = \{(x,z,y) \mid (x,y) \in A \text{ und } zeY\}$. Dann ist $C \subset X \times Y \times Y$ eine Borelmenge, und für $\lambda \bullet \mu$ -fast alle (x,z) ist $C_{(x,z)} = A_x$ überabzählbar. Nach [Graf-Mauldin 85,Th.4.1] existiert eine Borelmenge $D \subset X \times Y$ mit $\lambda \bullet \mu(D)=1$ und eine injektive Borel-meßbare Funktion $F: D \rightarrow Y$, so daß für alle $(x,z) \in D$ gilt: $F(x,z) \in C_{(x,z)}$ und $\mu(F(D))=0$. Da $\lambda \bullet \mu(D) = 1$ ist, existiert eine Borelmenge $B \subset X$ mit $\lambda(B)=1$, derart daß für alle $x \in B$ gilt $\mu(D_x) > 0$. Nach Theorem 4 existiert eine injektive, Borelsche Parametrisierung T von $D \cap (B \times Y)$ mit Parameter-Raum Y . Sei G die Funktion, die jedem $(x,z) \in B \times Y$ den eindeutig bestimmten Punkt $(x,y) \in D \cap (B \times Y)$ mit $T(x,y,z)$ zuordnet. Dann ist G eine injektive, Borel-meßbare Funktion von $B \times Y$ in $D \cap (B \times Y)$. Man definiere eine Δ_1^1 -Relation $H \subset X \times Y \times Y$ durch $H = \{(x,y,z) \mid y = F(G((x,z))) \text{ und } (x,y) \in B \times Y\}$. $F \circ G : B \times Y \rightarrow Y$ ist injektiv und für alle $(x,z) \in B \times Y$ gilt: $F(G((x,z))) \in C_{(x,z)} = A_x$. Somit ist H eine Heiratsparametrisierung der Menge $A \cap (B \times Y)$. Da $\mu(F(D))=0$ ist, ist auch der Wertebereich von H eine μ -Nullmenge. #

Obige Konstruktionen von Heiratsparametrisierungen setzen stets die Existenz entsprechender Heiratsfunktionen voraus. Der Versuch, eine Heiratsfunktion für eine Relation A durch Zusammensetzen von partiellen Heiratsfunktionen mit mageren Wertebereichen zu konstruieren, scheitert zunächst an folgenden Phänomen: Es gibt Relationen $A \subset X \times Y$, $A \in \Gamma$ mit Fasern A_x von zweiter Kategorie, derart daß jede Uniformisierung von A einen Wertebereich von zweiter Kategorie hat.

Beispiel: Sei $A \subset X \times Y$ universell für die Klasse Γ (d.h. $A \in \Gamma$ und für jede Punktmenge $B \subset Y$ mit $B \in \Gamma$ existiert ein Punkt $x \in X$ mit $B = A_x$).

Dann ist die Relation $A^* := (P^*(A) \times Y) \cap A$ aus der Klasse Γ und hat nur Fasern von zweiter Kategorie. Sei U eine Uniformisierung von A^* mit Wertebereich B . Angenommen B ist von erster Kategorie. Dann existiert eine $F_{\sigma'}$ -Menge $B' \supset B$ von erster Kategorie. Da A universell für $\Gamma \supset \Pi_2^0$ ist, existiert ein Punkt $x \in P^*(A)$ mit $(Y - B') = A_x$; dies steht im Widerspruch zu $U(x) \in A_x^*$.

Im folgenden Theorem 7 konstruieren wir eine Heiratsfunktion für eine projektive Relation, die sich als Vereinigung von Rechtecken mit projektiven Seiten darstellen läßt. Für derartige Relationen ergeben sich dann mit Hilfe von Theorem 6 projektive Heiratsparametrisierungen. Doch zunächst sind einige Vorbereitungen vonnöten.

Definition: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Punktmenge eines Raumes X . Eine Familie $(R_i)_{i \in I}$ von Punktmenge heißt eine J-Reduktion von $(A_i)_{i \in I}$, falls für alle $i, j \in I$ gilt:

- 1) $R_i \subset A_i$
- 2) $i \neq j \implies R_i \cap R_j = \emptyset$
- 3) R_i ist überabzählbar und Borelsch
- 4) $R_i \in J$.

Wir verlangen von einer J-Reduktion nicht, daß sie die gleiche Vereinigung wie die Ausgangsfamilie hat.

Lemma 13. $(\text{Det}(\Delta_n^1))$ Für eine Folge $(A_i)_{i \in \omega}$ von Σ_n^1 -Punktmenge eines Raumes X mit $A_i \notin J$ existiert eine J-Reduktion.

Beweis: (Induktion). Sei $(R_i)_{i < m}$ eine J-Reduktion der Familie $(A_i)_{i < m}$. Dann ist $(A_m - \bigcup_{i < m} R_i)$ kein Element von J und somit überabzählbar. Da weiterhin $(A_m - \bigcup_{i < m} R_i) \in \Sigma_n^1$ ist, folgt mit Martins "perfect subset theorem" (vgl. [Moschovakis 80, 6.G.10]), daß $(A_m - \bigcup_{i < m} R_i)$ eine perfekte Teilmenge enthält. Diese wiederum enthält eine überabzählbare Borel-Menge $R_m \in J$ (z.B. eine Cantor-Menge). #

Korollar $(\text{Det}(\Delta_n^1))$ Sei $(A_i)_{i \in \omega}$ wie in Lemma 13.

Dann existiert für (A_i) eine Reduktion (im klassischen Sinn) in überabzählbare Mengen. Genauer: Es existiert eine Folge von paarweise disjunkten, überabzählbaren $\sigma(\Sigma_n^1)$ -Mengen S_i mit $S_i \subset A_i$ und $\bigcup_{i \in \omega} S_i = \bigcup_{i \in \omega} A_i$.

Beweis: Man konstruiere $(R_i)_{i \in \omega}$ wie in Lemma 13 und setze

$$S_m = A_m - \left(\bigcup_{i > m} R_i \cup \bigcup_{i < m} S_i \right). \#$$

Theorem 7. $(\text{Det}(\Delta_{2n}^1))$

Die Punktmenge $A \subset X \times Y$ sei die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{i \in \omega} (A_i \times B_i)$ von Rechtecken mit Seiten $A_i, B_i \in \Sigma_{2n}^1$. Für alle $x \in \text{Proj}^Y(A)$ gelte $A_x \notin J$. Dann existiert eine Heiratsfunktion $U \in \Sigma_{2n}^1$ für A.

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß alle für alle i gilt: $B_i \notin J$.

Sei (R_i) eine J-Reduktion von (B_i) . Da R_i überabzählbar ist existiert eine perfekte Teilmenge $P_i \subset R_i$. Für alle i sei $f_i: X \rightarrow P_i$ ein Borelisomorphismus und $U_i = \{(x, y) \mid x \in A_i \text{ und } y = f_i(x)\}$. Dann ist $\bigcup U_i \in \Sigma_{2n}^1$. Mit dem Uniformisierungs-Theorem von Moschovakis existiert eine Σ_{2n}^1 -Uniformisierung U von $\bigcup U_i$. Dann ist U eine Heiratsfunktion für die Relation A. #

Korollar: $(\text{Det}(\Delta_{2n}^1))$

Sei eine Relation $A \subset X \times Y$ wie in Theorem 7 gegeben. Dann existiert eine Heiratsparametrisierung von A aus der Klasse Σ_{2n}^1 .

Theorem 7 läßt sich unter stärkeren Determiniertheithypothesen auch auf überabzählbare Familien von Rechtecken verallgemeinern. Wir benötigen hierzu einige Definitionen.

Definition: Sei k eine Kardinalzahl. $\text{Seq}(k)$ bezeichne die Menge aller endlichen Folgen von Ordinalzahlen kleiner als k . Eine Funktion P von $\text{Seq}(k)$ in die Menge der abgeschlossenen Teilmengen eines Raumes X heißt ein k -Suslin-System. Eine Punktmenge $A \subset X$ heißt k -Suslin (in Zeichen: $A \in \mathcal{J}(k)$), falls es ein k -Suslin-System P gibt, derart daß gilt: $A = \mathcal{A}^k(P)$.

Hierbei ist die verallgemeinerte Suslin-Operation $\mathcal{A}^k$ definiert durch:

$$\mathcal{A}^k(P) = \bigcup_{f \in k^\omega} \bigcap_{n \in \omega} P(f|n).$$

Die zu einer projektiven Punktmenge Δ_n^1 gehörige projektive Ordinalzahl δ_n^1 ist definiert durch:

$$\delta_n^1 = \sup \{ \delta \mid \text{es gibt eine reguläre } \Delta_n^1\text{-Norm } \phi \text{ von } X \text{ auf } \delta \}.$$

Die projektiven Ordinalzahlen sind via Borelisomorphismen unabhängig vom Raum X . Wir definieren k_n als die kleinste Kardinalzahl grösser-gleich δ_n^1 .

Die folgenden drei Sätze werden zum Beweis des nächsten Theorems benötigt.

Theorem: (Shoenfield, Martin, Solovay, Moschovakis) [Moschovakis 71]

$$\text{Det}(\Delta_{2n}^1) \text{ impliziert } \Sigma_{2n+2}^1 \subset \mathcal{J}(\delta_{2n+1}^1).$$

Suslin-Mansfield-Theorem: ([Mansfield 70]) Eine Punktmenge A sei

k -Suslin und es gelte: $|A| > k$. Dann enthält A eine perfekte Teilmenge.

Theorem: (Martin, vgl. [Moschovakis 80, 2F4])

Eine Punktmenge A ist k -Suslin genau dann, wenn sie Vereinigung von k vielen Borel-Mengen ist.

Theorem 8. $(\text{Det}(\Delta_{2n}^1) + \text{Det}(\mathcal{J}(k_{2n}^1)))$

Sei $\phi: A \rightarrow \delta$ eine reguläre Σ_{2n}^1 -Norm auf $A \subseteq X \times Y$, $A = \text{Proj}^Y(A_\nu^\phi)$,
 $B = \text{Proj}^X(A_\nu^\phi)$ für alle $\nu < \delta$ gelte: $B \notin J$. Dann existiert für die
 Relation $\bigcup_{\nu < \delta} (A_\nu \times B_\nu)$ eine Heiratsfunktion der Komplexität $\mathcal{J}(k_{2n}^1)$.

Beweis: Wir konstruieren mit transfiniter Induktion zunächst eine J -Reduktion
 $(R_\nu)_{\nu < \delta}$ der Rechteckseiten $(B_\nu)_{\nu < \delta}$. Für $\alpha < \delta$ sei $(R_\nu)_{\nu < \alpha}$ eine J -Reduktion von
 $(B_\nu)_{\nu < \alpha}$. Sei $R := \bigcup_{\nu < \alpha} R_\nu$ und die Relation $T \subseteq Y \times Y$ definiert durch

$$T(y, y') \iff y, y' \in R \text{ und } \exists x, x': (x, y) \leq_\phi^* (x', y').$$

Die Relation R ist wegen Martins Theorem k_{2n}^1 -Suslin, das rechte Kon-
 junktionsglied nach dem Satz von Shoenfield-Martin-Solovay-Moschovakis aus
 der Klasse $\mathcal{J}(k_{2n}^1)$. Da $\mathcal{J}(k_{2n}^1)$ determiniert ist, hat T die Bairesche
 Eigenschaft und ist universell meßbar. Völlig analog zum Beweis von Theorem 1
 zeigt man: $T \in J$. Es existiert eine Borelmenge $R' \supset R$ mit $R' \in J$. Somit ist
 $(B_\alpha - R') \notin J$ und k_{2n}^1 -Suslin. Mit dem Suslin-Mansfield-Theorem enthält
 $B_\alpha - R'$ eine perfekte Teilmenge, und diese wiederum eine überabzählbare Borel-
 Menge von erster Kategorie (bzw. von Maß null).

Für alle $\nu < \delta$ wählen wir eine Borelinjektion U_ν von X in R_ν . Mit Martins
 Theorem ist $\bigcup_{\nu < \delta} U_\nu$ wieder k_{2n}^1 -Suslin. Nach [Kechris-Moschovakis 76]
 existiert eine k_{2n}^1 -Suslin Uniformisierung U von $\bigcup_{\nu < \delta} U_\nu$. Die Einschrän-
 kung von U auf $\bigcup_{\nu < \delta} A_\nu$ ist dann eine Heiratsfunktion. #

Die Konstruktion einer Parametrisierung aus einer Heiratsfunktion (Theorem 6) legt die Vermutung nahe, daß ein Parametrisierungssatz für eine Punktklasse Γ einen Heiratssatz impliziert. Folgendes Beispiel spricht jedoch gegen diese Vermutung.

Beispiel: Es gibt eine Borelmenge $A \subset X \times Y$ dergestalt, daß für alle $x \in X$ die Fasern A_x positives Maß haben und jede Boreluniformisierung von A nicht injektiv ist [Graf-Mauldin 85, 4.3]. Dennoch läßt sich A in Borel-meßbarer Weise parametrisieren (Theorem 4).

Die Suche nach einer Heiratsfunktion mit der gleichen Komplexität wie eine gegebene Parametrisierung ist daher im allgemeinen aussichtslos. Schwächt man die Komplexitätsanforderungen an die Heiratsfunktion ab, so ergeben sich die folgenden zwei offenen Fragen:

- 1) Angenommen, jede Relation $A \subset X \times Y$ mit $A \in \Gamma$ und Fasern von zweiter Kategorie besitzt eine injektive Parametrisierung der Komplexität Γ . Existiert dann für alle $A \in \Gamma$ mit Fasern von zweiter Kategorie eine fast überall definierte Heiratsfunktion aus der Klasse Γ ?
- 2) Existiert (unter den gleichen Voraussetzungen) für jede Γ -Relation mit nicht-mageren Fasern eine Heiratsfunktion mit höherer Komplexität als Γ .

Obige Fragen wurden zwar in Spezialfällen positiv beantwortet (z.B.

[Graf-Mauldin 85] für $\Gamma = \Delta$ und [Kaniewski-Rogers 80] für $\Gamma = \Sigma_n^1$ und " $V=L$ "), allgemeinere Antworten stehen jedoch noch aus.

Um die in den Theoremen 7 und 8 gegebenen Konstruktionen einer Heiratsfunktion auf die allgemeine Situation einer projektiven Relation mit nicht-mageren Fasern zu verallgemeinern, liegt der Übergang von Normen zu Skalen nahe. Man erhält dann zwar zu jeder Norm ϕ_n der Skala $\overline{\Phi}$ eine Heiratsfunktion für die n -te Approximation von A (die Vereinigung der von ϕ_n induzierten Rechtecke), jedoch ist der punktweise Limes dieser Folge von Heiratsfunktionen im allgemeinen nicht injektiv.

Dennoch vermuten wir (unter Voraussetzung von PD), daß für jede projektive Relation mit Fasern von zweiter Kategorie eine projektive Heiratsfunktion existiert.

Es sind Spielarten der in dieser Arbeit bewiesenen Parametrisierungs-Sätze denkbar, welche den Begriff der grossen Faser ($\clubsuit$) variieren. Ersetzt man "groß" durch "enthält eine perfekte Teilmenge" so sind im Borel-Fall einschlägige Resultate bekannt ([Mauldin79]). Das σ -Ideal der sogenannten Ramsey-Nullmengen (= mager in der Ellentuck-Topologie) wurde in diesem Zusammenhang noch nicht untersucht. Obwohl die Ramsey-Nullmengen viele Eigenschaften mit den gewöhnlichen mageren Mengen teilen (vgl. z.B. [Louveau-Simpson 84] und [Woodin 81]) ist ein Analogon zum Satz von Fubini nicht bekannt. Da der Satz von Fubini hier jedoch eine Schlüsselstellung (Theorem 1) einnimmt, sind die verwendeten Beweise auf eine Ramsey-Variante nicht unmittelbar anwendbar.

Literatur

- J.Addison: Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory.
Fund. Math. 46 (1959), 123-135
- J.Addison, Y.Moschovakis: Some consequences of the axiom of definable determinateness. Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 59 (1968), 708-712
- A.Blass: Determinateness and continuity.
Proc.Amer.Soc. 37 (1973), 572-574
- D.Cenzer, D.Mauldin: Measurable parametrizations and selections.
Trans.Amer.Math.Soc. 245 (1978), 399-408
- D.Cenzer, D.Mauldin: Induktive definability: measure and category.
Advances in Mathematics 38 (1980) 55-90
- D.Gale, F.M.Stewart: Infinite games with perfect information.
Ann. Math. Studies, 28 (1953) 245-66
- S.Graf, D.Mauldin: Measurable one-to-one selections and transition kernels.
Amer. Journal of Math. (1985), 407-425
- L.Harrington: Analytic determinacy and $\aleph_1$.
Journal for Symbolic Logic 43(1978),685-693
- J.Kaniewski, C.A.Rogers: Double uniformization.
J. London Math. Soc. (2) 22 (1980), 521-533
- A.Kechris: Measure and category in effective descriptive set theory.
Ann.Math.Logic 5 (1973), 337-384
- A.Kechris: AD and projective ordinals.
Cabal Seminar 76-77; Lecture Notes in Mathematics 689
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York (1978)
- A.Kechris: Determinacy with complicated strategies.
Proc.Amer.Math.Soc. 94 (1985), 333-336
- A.Kechris,Y.Moschovakis: Notes on the theory of scales.
Cabal Seminar 76-77; Lecture Notes in Mathematics 689
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York (1978)

- A.Kechris, R.Solovay: On the relative consistency strength of determinacy hypotheses. Trans.Amer.Math.Soc. 290, (1985), 179-211
- A.Levy: Definability in axiomatic set theory I.
Logic, Methodology and Philosophy of Science
Y. Bar-Hillel, ed.(North-Holland, Amsterdam 1965), 127-151
- A.Louveau, G.Simpson: A separable image theorem for Ramsey mappings.
Bull.Acad.Pol.Sci;Ser.Sci.Math. 30 (1982), 105-108
- R.Mansfield: Perfect subsets of definable sets of real numbers.
Pacific J. Math 35 (1970), 451-457
- D.Martin: Borel determinacy.
Annals of Math. 102(1975), 363-371
- D.Mauldin: Borel parametrizations.
Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 223-234
- Y.Moschovakis: Uniformisation in a playful universe.
Bull.Amer.Math.Soc. 77 (1971), 731-736
- Y.Moschovakis: Descriptive Set Theory.
North-Holland Publishing Company; Amsterdam/New York/Oxford 1980
- Mycielski, Steinhaus: A mathematical axiom contradicting the axiom of choice.
Bull.Pol.Acad. 10(1962), 1-3
- H.Tanaka: Some results in the effective descriptive set theory.
Public.Res.Inst.Math.Sci, Ser.A 3 (1967), 11-52
- H.Woodin: On the consistency strength of projective uniformisation.
Proceedings of the Herbrand Symposium 1981
J.Stern (Hrsg.), North-Holland Publishing Company; Amsterdam/New York/Oxford (1982), 105-108
- H.Woodin: unveröffentlichter Vortrag.
Logic Colloquium '83, Aachen.

Lebenslauf

Ich wurde am 25. Februar 1954 als erster Sohn des Landwirts Wolfgang Funke und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Lorz, in Neuhaus geboren.

Von 1960 bis 1964 besuchte ich die Volksschule in Neuhaus und anschließend das Gymnasium in Höchstadt, wo ich 1973 das Abitur machte.

Nach der Grundwehrdienstzeit begann ich im Wintersemester 1974/75 das Studium der Mathematik und Philosophie an der Universität Heidelberg. Im Sommersemester 1975 wechselte ich an die Universität München. Die Vorlesungen von Herrn Professor Schütte weckten mein Interesse an mathematischer Logik und Mengenlehre. Vom Wintersemester 76/77 an studierte ich an der Universität Erlangen-Nürnberg, wo ich 1980 die Diplomprüfung in Mathematik ablegte.

Ab 1981 war ich am Mathematischen Institut in Erlangen als wissenschaftliche Hilfskraft, seit 1983 als wissenschaftlicher Mitarbeiter, tätig.

Möhrendorf, im November 1985

